TITLE:

Wigner関数,伏見関数 : 量子力学における位相空間分布関数(基研長期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告)

AUTHOR(S):

中村, 孔一

CITATION:

中村, 孔一. Wigner関数,伏見関数 : 量子力学における位相空間分布関数(基研長期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告). 物性研究 1988, 51(2): 128-135

ISSUE DATE:

1988-11-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/93506

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

$$Z_{\mathrm{QFT}}(J) = \frac{\exp\{-i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\}\,W(J)}{[\exp\{-i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\}\,W(J)]_{J=0}} = \frac{W(J)\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}(J)}{\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}(0)}$$

$$\equiv W(J)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}(J) \qquad (23)$$

これから、第nオーダー$\Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}$に関しての、次の漸化式が導ける。

$$\begin{cases} \Delta_{\mathrm{QFT}}^{(0)}(J) = 1 \\ \Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}(J) = H^{(n)}(J) - \sum_{l=0}^{n-1}\Delta_{\mathrm{QFT}}^{(l)}(J)\,H^{(n-l)}(0) \end{cases} \qquad (24)$$

これは、$\Delta^{(n)}(J;\infty,0)$が満たす漸化式と同一である。それ故、任意の$n(\geq 0)$に対して

$$\Delta^{(n)}(J;\infty,0) = \Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}(J)$$

が成立し、従って(18)、(23)により摂動論の意味で

$$\lim_{t\to\infty} Z(J;t) = Z_{\mathrm{QFT}}(J)$$

であることが証明できた。

詳しくは、“Equilibrium Limit of the Stochastic Quantization in Minkowski Space”, R. Fukuda and H. Higurashi, (to be published in Phys. Lett. B) をご参照下さい。

Wigner 関数，伏見関数 —量子力学における位相空間分布関数—

明治大学・和泉　中 村 孔 一

量子力学的な状態を特徴づける分布関数を座標と運動量の組 — 位相空間の点 — の関数として表わす試みは，1932年にE. Wignerによって提唱された。[1] その後，伏見によって，やや異なる形の同様な分

布関数が論じられている。[2] このreviewでは，そうした試み相互の関係を概観する。特に，物理量を表わす演算子を古典論と対応させる際に生ずる“順序の問題”とそれぞれの分布関数の定義の間の関係を述べる。

§ 1　Wigner関数

古典力学では，系の状態は位相空間の点(q, p)，あるいはより一般には，位相空間の上で定義された適当な確率密度$P_C(q, p)$で表わされる。そして物理量$A(q, p)$のその状態での平均値は，

$$\langle A\rangle_C = \int dq\,dp\,A(q, p)\,P_C(q, p) \tag{1}$$

で与えられる。(以下，記述を簡単にするために一自由度の場合を考える。ほとんどの式は，多自由度の場合に容易に拡張できる。)

一方，量子力学では，系の状態は適当な密度行列演算子ρで表わされ，物理量$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$のその状態での平均値は，

$$\langle A\rangle_Q = \mathrm{Tr}\,(\rho\hat{A}) \tag{2}$$

で与えられる。

そこで，ρと$\hat{A}$に対して適当な(c数の)関数$P_\rho(q, p)$と$A(q, p)$を定義して，量子力学での平均値(2)を(1)に類似な積分

$$\langle A\rangle_Q = \int dq\,dp\,A(q, p)\,P_\rho(q, p) \tag{3}$$

と書き表わすことを考える。

Wignerは，P_ρとして，次のような関数を考えた：

$$P^W_\rho(q, p) = \mathrm{Tr}\,(\rho\hat{\Delta}_W(\hat{q}, \hat{p}\,;\,q, p)), \tag{4}$$

ただし

$$\hat{\Delta}_W(\hat{q}, \hat{p}\,;\,q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int du\,dv\,e^{iu(q-\hat{q})+iv(p-\hat{p})}. \tag{5}$$

特にρとしてpure state

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

をとると，(4)は

$$P^W_\psi(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\xi\,\psi^*\left(q-\frac{\xi}{2}\right)\psi\left(q+\frac{\xi}{2}\right)e^{-ip\xi/\hbar} \tag{6}$$

と書ける(Wignerの原論文[1]では，(6)の形でPが定義されている)。

式(4)，あるいは式(6)で定義される関数$P^W_\rho(q, p)$はWigner関数，Wigner密度関数などと呼

ばれる。

Wigner 関数 P_ρ^W を用いて，量子力学的平均 $\langle A\rangle_Q$ を (3) のように書き表わすには，$A(q, p)$ を以下の $A_W(q, p)$,

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \int dq\,dp\,\hat{\Delta}_W(\hat{q}, \hat{p}; q, p)\,A_W(q, p), \tag{7}$$

のようにとればよいことは，(4) を (3) の右辺に代入し，(2) と見くらべれば容易にわかる。式 (7) は次のように書くこともできる：

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \int du\,dv\,e^{-iu\hat{q}-iv\hat{p}}\,\tilde{A}_W(u, v), \tag{8a}$$

$$\tilde{A}_W(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dq\,dp\,e^{iuq+ivp}A_W(q, p). \tag{8b}$$

これは，古典的な量 $A_W(q, p)$ と量子力学的な量を表わす演算子 $\hat{A}(q, p)$ を対応させるひとつの方法として Weyl によって提案されたものに他ならない。[3)]

§2 Wigner 関数のいくつかの性質

式 (4)，あるいは式 (6) で定義される関数 $P_\rho^W(q, p)$，あるいは，$P_\psi^W(q, p)$ が以下のような性質をもつことは，簡単な計算によって確かめられる。

i) $P_\rho^W(q, p)$ は実数値をとる。

ii) $\int dp\,P_\rho^W(q, p) = \langle q|\rho|q\rangle,$

$\int dq\,P_\rho^W(q, p) = \langle p|\rho|p\rangle,$

$\int dq\,dp\,P_\rho^W(q, p) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1.$

iii) P_ψ^W は Galilei 変換に対して次のように変換する：

$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x + a)$ とすると，$P_{\psi'}^W(q, p) = P_\psi^W(q + a, p),$

$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-ip'x}\psi(x)$ とすると，$P_{\psi'}^W(q, p) = P_\psi^W(q, p + p').$

iv) P_ψ^W は空間および時間反転に対して次のように変換する：

$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(-x)$ とすると，$P_{\psi'}^W(q, p) = P_\psi^W(-q, -p),$

$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi^*(x)$ とすると，$P_{\psi'}^W(q, p) = P_\psi^W(q, p).$

v) $\psi(x)$ として自由粒子の波動関数，すなわち，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x, t)$$

をみたすものをとると，

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\psi}^{W}(q, p; t) = -\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} P_{\psi}^{W}(q, p; t).$$

vi) $2\pi\hbar\int dq\,dp\,P_{\psi}^{W}(q, p)\,P_{\phi}^{W}(q, p) = |\int dx\,\psi^{*}(x)\,\phi(x)|^{2}.$

この式から，直ちに，互いほ直交する ψ と ϕ に対しては，

$$\int dq\,dp\,P_{\psi}^{W}(q, p)\,P_{\phi}^{W}(q, p) = 0$$

となることが導かれ，一般にはWigner関数 P_{ψ}^{W} は正定値でないことがわかる。

vii) 表式(6)は運動量表示に移っても同様の形をとる，すなわち，

$$P_{\psi}^{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\eta\,\tilde{\psi}^{*}\left(p-\frac{\eta}{2}\right)\tilde{\psi}\left(p+\frac{\eta}{2}\right)e^{-iq\eta/\hbar}.$$

ただし，$\tilde{\psi}(p)$ は運動量表示での波動関数を意味する。

逆に，上の i)～v)のすべてをみたす関数 $P(q, p)$ は，Wigner関数に限られることが，Wigner自身によって証明されている。[4)]

また，i)～iv)および vi)のすべてをみたす関数もWigner関数に限られることが知られている。[5)]

§3 Weylの方法によってつくられた演算子の積

式(8a)の右辺に現れる演算子

$$\hat{T}(u, v) = e^{-iu\hat{q}-iv\hat{p}} \tag{9}$$

が，次のような恒等式をみたすことは容易に確かめられる：

$$\mathrm{Tr}\,\hat{T}(u, v) = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(u)\delta(v), \tag{10a}$$

$$\hat{T}(u, v)\hat{T}(u', v') = \hat{T}(u+u', v+v')\exp\left[-i\frac{\hbar}{2}\det\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}\right]. \tag{10b}$$

式(10a)と(10b)から，直ちに，恒等式

$$\mathrm{Tr}(\hat{T}(u, v)\hat{T}(u', v')) = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(u+u')\delta(v+v') \tag{11}$$

あるいは，

$$\mathrm{Tr}(\hat{\Delta}_{W}(\hat{q}, \hat{p}; q, p)\hat{\Delta}_{W}(\hat{q}, \hat{p}; q', p')) = \frac{1}{2\pi\hbar}\delta(q-q')\delta(p-p') \tag{12}$$

を導くことができる。式(12)を使えば，(7)の逆が求まる：

$$A_{W}(q, p) = \mathrm{Tr}(\hat{\Delta}_{W}(\hat{q}, \hat{p}; q, p)\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})). \tag{13}$$

恒等式(10b)に注意すると，定義(8)から次の命題が導かれる。

“$\hat{C}(\hat{q},\hat{p})=\hat{A}(\hat{q},\hat{p})\hat{B}(\hat{q},\hat{p})$とすると，

$$C_W(q,p)=A_W(q,p)\exp\left[i\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right]B_W(q,p).” \tag{14}$$

また，交換子$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\equiv D$を考えると，(14)より

$$\begin{aligned}D_W(q,p)&=2i\,A_W(q,p)\sin\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right]B_W(q,p)\\&=i\hbar\{A_W,B_W\}_P+O(\hbar^2)\end{aligned}\tag{15}$$

が得られる。すなわち，“Weylの方法”による対応(7)によって，交換子は($\hbar$の最低次で)Poisson括孤に移される：

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}]\longrightarrow\{A_W,B_W\}+O(\hbar).$$

特に$\hat{A}$として密度行列演算子ρ，$\hat{B}$としてHamiltonian $\hat{H}$をとると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}=\frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\rho] \tag{16}$$

の対応物として，

$$\frac{\partial}{\partial t}P_\rho^W(q,p)=\{H_W(q,p),P_\rho^W(q,p)\}_P+O(\hbar) \tag{17}$$

が得られる。

§4 伏見関数

§2で述べたようにWigner関数は正定値ではない。その意味で，$P_\rho^W(q,p)$を確率密度と考えることはできない。それに対して，伏見によって導入された，以下に述べる関数は正定値という性質をもっている。[2)]

いま，xの平均がq，運動量の平均がp，それぞれの分散が$\Delta q=\sqrt{\alpha/2}$，$\Delta p=\hbar/\sqrt{2\alpha}$であるような波束

$$\psi_{q,p}(x;\alpha)=\frac{1}{(\pi\alpha)^{1/4}}\exp\left[-\frac{1}{2\alpha}(x-q)^2+ipx/\hbar\right] \tag{18}$$

を考え，この波束を波動関数とする状態での密度行列演算子の期待値を考える：

$$P_\rho^H(q,p;\alpha)=\langle\psi_{q,p}|\rho|\psi_{q,p}\rangle. \tag{19}$$

この関数(伏見関数)が正定値であることは，その定義からも明らかである。

伏見関数とWigner関数の関係を調べるために，ρとして

$$\rho = |\psi><\psi|$$

をとり，(19) の右辺を計算すると

$$P_\psi^H(q,p;\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int dq' d\xi \psi^*(q' - \frac{\xi}{2}) \psi(q' + \frac{\xi}{2})$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{\alpha}(q-q')^2 - \frac{1}{4\alpha}\xi^2 - ip\xi/\hbar\right]$$
$$= 2\int dq' dp' \exp\left[-\frac{1}{\alpha}(q-q')^2 - \frac{\alpha}{\hbar^2}(p-p')^2\right]$$
$$\times P_\psi^W(q', p'). \tag{20}$$

伏見関数はWigner関数をGauss関数でならしたものになっていることがわかる。

一般に

$$P_\rho^H(q,p) = 2\int dq' dp' \exp\left[-\frac{1}{\alpha}(q-q')^2 - \frac{\alpha}{\hbar^2}(p-p')^2\right]$$
$$\times P_\rho^W(q', p') \tag{21}$$

を ρ で指定される状態の伏見関数と呼ぶことにする。

式 (21) はFourier変換に移ると

$$\widetilde{P}_\rho^H(u,v) = 2\pi\hbar e^{-\frac{\alpha}{4}u^2 - \frac{\hbar^2}{4\alpha}v^2} \widetilde{P}_\rho^W(u,v) \tag{22}$$

と書ける。(4), (5) より

$$\widetilde{P}_\rho^W(u,v) = \mathrm{Tr}(\rho \hat{T}(u,v)) \tag{23}$$

と書ける（$\hat{T}$ は (9) で与えられた演算子）から，

$$\hat{T}_H(u,v) = 2\pi\hbar\, e^{-\frac{\alpha}{4}u^2 - \frac{\hbar^2}{4\alpha}v^2} \hat{T}(u,v) \tag{24}$$

という演算子を導入すると，

$$\widetilde{P}_\rho^H(u,v) = \mathrm{Tr}(\rho \hat{T}_H(u,v)) \tag{25}$$

と書ける。あるいは，(5) に対応して

$$\hat{\Delta}_H(\hat{q}, \hat{p}; q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int du\, dv\, e^{iuq + ivp} \hat{T}_H(u,v) \tag{26}$$

と書くと，(4) に対応する式

$$P_\rho^H(q,p)=\mathrm{Tr}\,(\rho\hat{\Delta}_H(\hat{q},\hat{p};q,p)) \tag{27}$$

が得られる。

そこで，

$$\hat{A}(\hat{q},\hat{p})=\int dq\,dp\,\hat{\Delta}_H(\hat{q},\hat{p};q,p)\,A_H(q,p) \tag{28}$$

をみたすC数の関数 $A_H(q,p)$ を考えると，量子力学的平均 $\langle A\rangle_Q$ に対して，伏見関数 P_ρ^H を使って，(3) のような表式が得られる：

$$\langle A\rangle_Q=\mathrm{Tr}\,(\rho\hat{A})=\int dq\,dp\,A_H(q,p)\,P_\rho^H(q,p). \tag{29}$$

最後に，(13) に対応する式，すなわち，(28) の逆を求めてみよう。

演算子 $\hat{q}$ と $\hat{p}$ から，交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ をみたす演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を次のようにしてつくる：

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\hat{q}+\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\hat{p}, \tag{29a}$$

$$\hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\hat{q}-\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\hat{p}. \tag{29b}$$

この $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ を使うと，(24) によって導入された $\hat{T}_H$ は

$$\hat{T}_H(u,v)=2\pi\hbar\,e^{-\gamma^*\hat{a}}\,e^{+\gamma\hat{a}^\dagger} \tag{30}$$

と書き表わせる。ただし，

$$\gamma=\frac{\hbar}{\sqrt{2\alpha}}v+i\sqrt{\frac{\alpha}{2}}u. \tag{31}$$

等式

$$\mathrm{Tr}\,(e^{\gamma'\hat{a}^\dagger}e^{\gamma'^*\hat{a}}\,\hat{T}_H(u,v))=(2\pi)^2\delta(u-u')\,\delta(v-v') \tag{32}$$

に注意すると，

$$\mathrm{Tr}\,(e^{\gamma\hat{a}^\dagger}e^{\gamma^*\hat{a}}\hat{A}(\hat{q},\hat{p}))=\int dq\,dp\,e^{iuq+ivp}A_H(q,p). \tag{33}$$

したがって，(28) の逆は

$$A_H(q,p)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int du\,dv\,e^{-iuq-ivp}\,\mathrm{Tr}\,(e^{\gamma\hat{a}^\dagger}e^{\gamma^*\hat{a}}\hat{A}(\hat{q},\hat{p})) \tag{34}$$

と書ける。

文　献

本文の中で引用した論文の他は，いくつかの最近の review をあげるに止めます。

1) E. Wigner, Phys. Rev. **40** (1932), 749.

2) K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **22** (1940), 264.

3) H. Weyl, Z. Phys. **46** (1927), 1.

4) E. Wigner, *Perspectives in Quantum Theory*, eds. W. Yourgrau and A. van der Merwe (Dover, N. Y., 1979), p 25.

5) R. F. O'Connell and E. P. Wigner, Phys. Lett. **83A** (1981), 145.

6) M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Sully and E. P. Wigner, Phys. Rep. **106** (1984), 121.

7) N. L. Balazs and B. K. Jennings, Phys. Rep. **104** (1984), 347.

8) P. Carruthers and F. Zachariasen, Rev. Mod. Phys. **55** (1983), 245.

9) W. E. Brittin and W. R. Chappell, Rev. Mod. Phys. **34** (1962), 620.

10) B. N. Tamapckuu, YΦH **139** (1983), 587.

11) B. B. Пo∂oHOB N B. N. MaHbKo, Tpy∂bl Φu3. NHC. 167 (1986), 7.

メソスコピックな体系の磁気抵抗効果
—電気伝導の統計物理の視点から—

慶大・理工　川　村　　清

1.　はじめに

最近，幅が100Å，長さ0.1 μ程度の細線の加工技術が開発され，そのような回路の電気伝導度が測定されるようになってきた。このように小さな体系をメソスコピックな体系という。マクロとミクロの間という意味であるが，その定量的な定義を「量子伝導がおこるという意味で十分に小さいが，電子準位の間隔は連続とみなせる程度には大きな体系」としておこう。

一般に電気伝導を考えるとき，長さのスケールとしては次のようなものが考えられる。

(1) l_a ；アンダーソン局在の局在長

(2) l_e ；弾性散乱の mean free path

(3) l_{in}；非弾性散乱の mean free path

そして，最後に，試料のサイズLである。

この様な細線でアンダーソン局在がおきかけているという証拠はいろいろあるが，電流は流れるのだか